ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

ЗАДАНИЕ для пружинно-массовой механической системы методом простых итераций вычислить высшую и низшую частоты и соответствующие формы колебаний системы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ Пусть имеется механическая система, состоящая из n масс m_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), соединенных между собой и основанием пружинами жесткостью c_k . На рисунке 1 показана одна из таких систем для $n = 3$. Массы могут двигаться только вертикально, без поворотов. В этом случае число степеней свободы и, соответственно, число обобщенных координат, необходимых для описания положения системы равно n . Выберем в качестве обобщенных координат смещения x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) сосредоточенных масс m_j от положения равновесия.

Уравнения свободных колебаний системы около положения равновесия

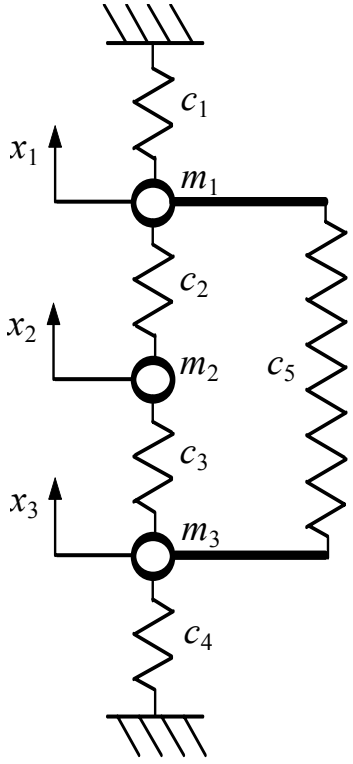


Рис. 1.

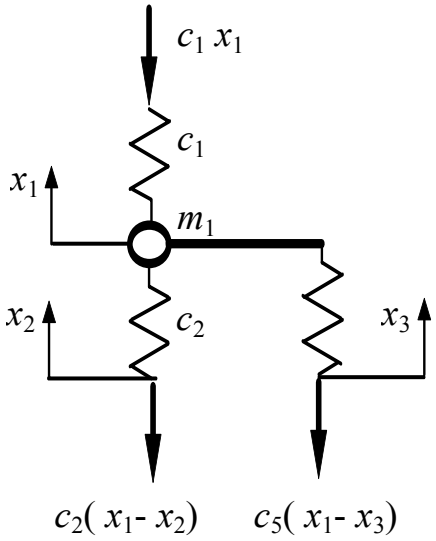


Рис. 2.

можно получить, используя II-й закон Ньютона.

Запишем уравнения II-й закона Ньютона для каждой массы

$$m_j \ddot{x}_j = F_j, \qquad (j = 1,2,\ldots,n), \qquad \ddot{x}_j = \frac{d^2 x_j}{d\ t^2}.$$

Восстанавливающие силы F_j , вычисляются как суммы сил, действующие на j-ю массу со стороны пружин, соединенных с ней, при отклонении массы от положения равновесия,. Усилие в каждой пружине численно равно

произведению жесткости пружины (c_j) на ее удлинение (разности смещений концов пружины).

Так, на массу m_1 системы (рис. 1) действуют три силы (рис. 2): со стороны верхней пружины - $c_1 x_1$ (знак «минус» показывает, что сила действует в противоположную сторону от направления x_1), со стороны левой нижней пружины - $c_2 (x_1 - x_2)$ (здесь $(x_1 - x_2)$ - удлинение пружины), со стороны правой нижней пружины - $c_5 (x_1 - x_3)$. Тогда уравнение движения для m_1 имеет вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 - c_2 (x_1 - x_2) - c_5 (x_1 - x_3)$$

Аналогично можно получить уравнения движения для всех масс. В итоге имеем систему уравнений движения

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 - c_2 (x_1 - x_2) - c_5 (x_1 - x_3) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2 (x_2 - x_1) - c_3 (x_2 - x_3) \\ m_3 \ddot{x}_3 &= -c_4 x_3 - c_3 (x_3 - x_2) - c_5 (x_3 - x_1) \end{aligned} \qquad (1)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1) разыскивается в виде

$$x_k = X_k e^{i \omega t}, \qquad (k = 1, 2, 3), \qquad (2)$$

где: X_k -амплитуда колебаний k-ой массы, ω - круговая частота.

Подставляя функции (2) в уравнения (1) , и сокращая на $e^{i \omega t}$, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 X_1 &= c_1 X_1 + c_2 (X_1 - X_2) + c_5 (X_1 - X_3) \\ m_2 \omega^2 X_2 &= c_2 (X_2 - X_1) + c_3 (X_2 - X_3) \\ m_3 \omega^2 X_3 &= c_4 X_3 + c_3 (X_3 - X_2) + c_5 (X_3 - X_1) \end{aligned} \qquad (2)$$

Вводя обозначения $\lambda = c_1 / m_1 \omega^2$, представим систему (1) следующим образом

$$X_1 = \lambda \left[(1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}) X_1 - \frac{c_2}{c_1} X_2 - \frac{c_5}{c_1} X_3 \right]$$

$$X_2 = \lambda \left[-\frac{c_2}{c_1} \frac{m_1}{m_2} X_1 + (\frac{c_2}{c_1} + \frac{c_3}{c_1}) \frac{m_1}{m_2} X_2 - \frac{c_3}{c_1} \frac{m_1}{m_2} X_3 \right]$$

$$X_3 = \lambda \left[-\frac{c_5}{c_1} \frac{m_1}{m_3} X_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{m_1}{m_3} X_2 + (\frac{c_3}{c_1} + \frac{c_4}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}) \frac{m_1}{m_3} X_3 \right]$$

или в матричном виде

$$\{ X \} = \lambda [H] \{ X \} \qquad (3)$$

где $\{ X \}^{\mathrm{T}} = \{ X_1, X_2, X_3 \}$, а элементы матрицы $[H]$ вычисляются по формулам:

$$H_{11} = 1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}, \quad H_{12} = -\frac{c_2}{c_1}, \quad H_{13} = -\frac{c_5}{c_1},$$

$$H_{21} = -\frac{c_2}{c_1} \frac{m_1}{m_2}, \quad H_{22} = (\frac{c_2}{c_1} + \frac{c_3}{c_1}) \frac{m_1}{m_2}, \quad \text{и т.д.}$$

Для определения минимального собственного значения λ и соответствующего ему собственного вектора $\{ X \}$ системы (3) можно воспользоваться несколькими методами, в частности, методом простых итераций, который заключается в следующем.

Выбирается некоторое начальное приближение для собственного вектора

$$\{ X \}^{(0)\,T} = \{ X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)} \}$$

по формуле

$$\{ X \}^{(1)} = [H] \{ X \}^{(0)}$$

или в общем случае

$$\{ X \}^{(i+1)} = [H] \{ X \}^{(i)}$$

На каждом шаге итераций определяются $\lambda_k^{(i+1)} = X_k^{(i)} / X_k^{(i+1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$,
С ростом числа итераций $\lambda_k^{(i+1}$ сходятся к минимальному собственному значению λ системы (3) . При достижении определенной точности в вычислении λ процесс итерации прекращается.

В процессе итераций абсолютные значения компонент вектора $\{ X \}$ растут, поэтому при численных расчетах после каждого шага итераций необходимо выполнять нормирование $\{ X \}$, например, по значению максимального модуля его элементов.

ЗАДАНИЕ. Для своего варианта

1. Получить систему дифференциальных уравнений движения в виде (1).
2. Записать систему однородных алгебраических уравнений в виде (2), (3). Выписать выражения для определения элементов матрицы [H].
3. Составить подпрограмму, в которой методом простых итераций вычисляются минимальные значения λ и соответствующий собственный вектор $\{ X \}$ для системы (3).
4. Составить головную программу для вычислений min λ (для матрицы [H]) и max λ (для матрицы $[H]^{-1}$).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

1. Составить подпрограмму. в которой вычисляются компоненты матрицы [H].
2. Составить головную программу, в которой:
   - вводятся исходные данные ($\frac{c_2}{c_1}$, $\frac{c_3}{c_1}$, … , $\frac{m_1}{m_2}$, …)
   - вызывается подпрограмма вычисления [H]
   - вызывается подпрограмма метода простых итераций
   - выводятся результаты (λ , $\{ X \}$, число итераций)

Данные из головной программы в подпрограмму вычисления [H] можно передавать либо через список формальных параметров, либо через общие области, используя оператор COMMON.

Подпрограмму метода простых итераций можно организовать следующим образом.

Формальные параметры H, X, Y, Z, AL, N, E ,m, mmax, IER где:

входные параметры: H (N, N) - матрица системы (3), N - порядок системы,
E - точность вычислений; mmax - максимальное число итераций;
выходные параметры: AL - значение λ_{min} системы (3), X(N) - соответствующий λ_{min} собственный вектор; m - число выполненных итераций; IER - код ошибки (IER = 0 - процесс сошелся, в противном случае IER=1).
массивы: Y(N), Z(N) - вспомогательные массивы для хранения результатов промежуточных вычислений.

Алгоритм подпрограммы

a) описание используемых массивов
b) задание начальных значений X
c) вычисление последующих приближений Y=H·X
d) вычисление значений $Z_i = X_i / Y_i$, $i = 1,..., n$
e) найти среднеквадратичную ошибку

$$E1 = \left| \frac{1}{|z_n|} \frac{1}{n-1} [\sum_{i=1}^{n-1} (z_i - z_n)^2]^{1/2} \right|$$

f) найти максимальный модуль элемента Y
   $S = \max(|Y_1|, |Y_2|, ... ,|Y_n|)$
g) вычислить начальное приближение для следующего шага итераций
   $X_i = Y_i / S$, $i = 1, n$
h) выполнить проверку на прекращение итераций:
   если $E1 - E > 0$, перейти на пункт c)
i) выполнить проверку на прекращение итераций по mmax:
   если m= mmax , выйти из подпрограммы с кодом ошибки IER=1
j) запомнить вычисленное значение λ (последнее значение Z_1)
   $AL = Z_1$
k) вернуться в вызывающую программу.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ. Исходная расчетная схема представляет собой цепочку из 5-ти масс и 6-ти жесткостей. В зависимости от варианта, одна из пружин может иметь нулевую жесткость (не учитывается при выводе уравнений движения),а некоторые массы могут быть соединены между собой или с основанием дополнительной "параллельной" жесткостью. В таблице 1 приведены номер нулевой жесткости и точки, соединенные "параллельной" жесткостью. В таблице 2 в зависимости от последней цифры кода группы заданны значения отношений масс и нулевых жесткостей.

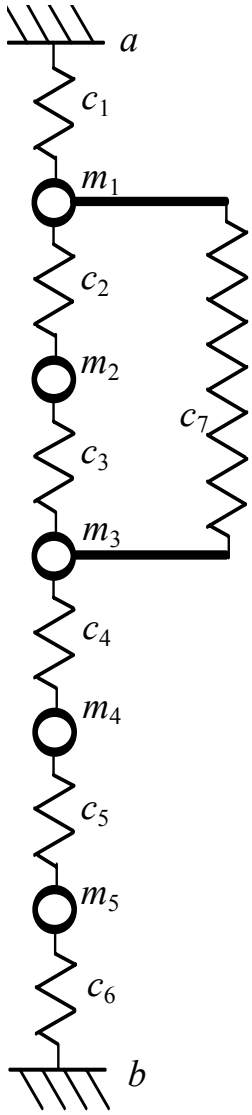


Рис. 3.

Таблица 1. Варианты расчетных схем.

№ вар.	Нулевые жесткости	Парал-ые жесткости	№ вар.	Нулевые жесткости	Парал-ые жесткости
1	2	4	1	2	4
1	1	—	16	—	4-b
2	1	1-3	17	—	a-3
3	1	2-4	18	—	1-4
4	1	3-5	19	—	2-5
5	1	4-b	20	—	1-5
6	1	1-4	21	2	1-3
7	1	2-5	22	3	2-4
8	1	3-b	23	4	3-5
9	1	1-5	24	3	1-4
10	1	2-b	25	3	1-5
11	—	—	26	1	2-4
12	—	1-3	27	1	1-3
13	—	2-4	28	1	2-4
14	—	3-5	29	1	2-5
15	—	a-2	30	1	2-5

Таблица 2. Варианты жесткостей и масс.

№	Жесткости c_i / c						Массы m_i / m				
вар.	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
1	1.0	2.0	0.8	1.2	0.9	1.5	1.0	0.5	1.2	2.0	0.8
2	1.0	1.5	0.5	2.0	2.0	1.0	1.0	1.0	2.0	3.0	0.5